Ergänzungsprüfung

zum Erwerb der Fachhochschulreife 2006

Prüfungsfach:	Mathematik (nichttechnische Ausbildungsrichtung)
Prüfungstag:	Donnerstag, 22. Juni 2006
Prüfungsdauer:	09:00 – 12:00 Uhr
Hilfsmittel:	Elektronischer, nichtprogrammierbarer Taschenrechner, zugelassene Formelsammlung

Hinweis:

Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben.

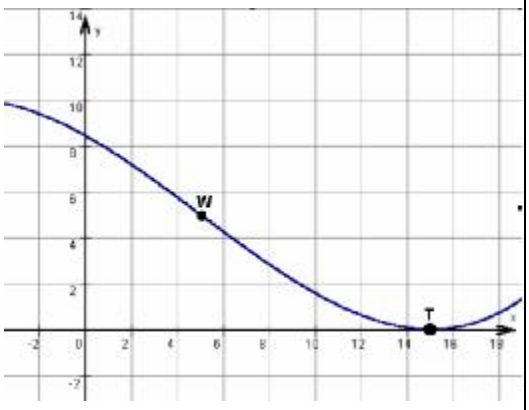
Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten.

Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülern zu bearbeiten.

Analysis: Aufgabe 1		BE
1.0	Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = a \cdot (x^3 - 9x^2 + 162)$ und $a \in \mathbb{R}$; D = $\mathbb{R}$	
1.1	Bestimmen Sie den Wert von a so, dass der Graph durch den Punkt P(3; 6) geht.	1
Für die folgenden Aufgaben gilt: $f(x) = \frac{1}{18} \cdot (x^3 - 9x^2 + 162)$. Der Graph der Funktion f wird mit G(f) bezeichnet.		
1.2	Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extremalpunkte von G(f).	5
1.3	Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunkts W des Graphen G(f) und bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente t. [Teilergebnis: $x_w = 3$]	4
1.4	Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden n, die im Punkt W auf der Wendetangente t senkrecht steht. [Ergebnis: n: $y = \frac{2}{3}x + 4$]	2
1.5	Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden n mit dem Graphen G(f). Runden Sie gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen.	5
1.6	Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G(f) im Bereich $-4 \le x \le 10$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein.	4
1.7	Der Graph G(f), die Gerade n und die y-Achse begrenzen im ersten Quadranten ein Flächenstück. Kennzeichnen Sie diese Fläche in Ihrer Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts.	4
	Summe:	25

Analysis: Aufgabe 2		BE
2.0	Der Graph G(f) der ganzrationalen Funktion f vierten Grades berührt die x-Achse im Punkt A(2; 0) und hat in $W_1(0; 0)$ eine Wendetangente mit der Steigung m = 1. Die Definitionsmenge der Funktion f ist D(f) = $\mathbb{R}$.	
2.1	Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f. [Ergebnis: $f(x)=\frac{1}{4}\cdot(x^4-3x^3+4x)$]	6
2.2	Die Funktion f lässt sich auch schreiben in der Form: $f(x) = \frac{1}{4}\cdot(x^2-x-2)(x-2)x$ (kein Beweis notwendig!) Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion.	4
2.3	Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extremalpunkte des Graphen G(f). Runden Sie gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen.	6
2.4	Untersuchen Sie, ob G(f) außer W_1 noch weitere Wendepunkte besitzt. Bestimmen Sie gegebenenfalls deren Koordinaten.	3
2.5	Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen G(f) im Bereich $-1{,}5 \le x \le 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 2 cm.	3
2.6	Der Graph G(f) und die x-Achse begrenzen im ersten Quadranten ein Flächenstück. Kennzeichnen Sie diese Fläche in Ihrer Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts.	3
	Summe:	25

Analysis: Aufgabe 3		*BE*
3.0	Ein Bauer schenkt seiner Gemeinde eine ebene Ackerfläche mit der Auflage, auf diesem Feld einen Bolzplatz für die Jugend anzulegen. Diese Fläche wird von zwei sich unter einem rechten Winkel schneidenden Flurbereinigungswegen (Koordinatenachsen) und einem Bach begrenzt.  Ein Architekt wird beauftragt die notwendigen Pläne und Berechnungen zu erstellen. Er fertigt einen Plan im Maßstab 1:1000 an und stellt fest, dass der Bach dem Graphen einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit dem Tiefpunkt T(15; 0) und dem Wendepunkt W(5; 5) folgt.	
3.1	Ermitteln Sie den Funktionsterm f(x). [Ergebnis: $f(x)=\frac{1}{400}(x^3-15x^2-225x+3375)$]	8
3.2	Ermitteln Sie die Maßzahl der Fläche, die von den Wegen und dem Bach auf dem Plan begrenzt wird.	5
3.3	Der Bolzplatz soll rechteckig werden, wobei zwei Rechtecksseiten auf den Koordinatenachsen liegen. Die Breite des Bolzplatzes sei $x=u$ mit $0<u<15$	
3.3.1	Übertragen Sie die Zeichnung aus der Angabe auf Ihr Blatt und zeichnen Sie für den Sonderfall u = 6 den Bolzplatz ein.	2
3.3.2	Ermitteln Sie die Funktion A, die die Fläche des Bolzplatzes in Abhängigkeit von u angibt. $\left[\text{Ergebnis: } A(u)=\frac{1}{400}\left(u^4-15u^3-225u^2+3375u\right)\right]$	2
3.3.3	Berechnen Sie den Wert von u, für den diese Fläche maximal wird und geben Sie die maximale Flächenmaßzahl an.	8
	Summe:	25

<table>
<tr><td colspan="2">Analysis: Aufgabe 4</td><td>BE</td></tr>
<tr><td>4.0</td><td>Die Gesamtkosten K(x), die einem Betrieb bei der Produktion von elektronischen Schaltelementen in einem Monat entstehen, hängen in folgender Weise von der Produktionsmenge x ab:
$K(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + 12$ für $0 \le x \le 11$
Dabei werden die Produktionsmenge x in der Einheit 1000 Stück und die Kosten in der Einheit 1000 Euro angegeben.</td><td></td></tr>
<tr><td>4.1</td><td>Ergänzen Sie die folgende Wertetabelle vollständig und zeichnen Sie den Graphen der Funktion K in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein.
(Verwenden Sie auf der Mengenachse (x-Achse) für eine Mengeneinheit einen cm und auf der Kostenachse (y-Achse) für 10 Kosteneinheiten einen cm).
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr>
<tr><td>K(x)</td><td>12</td><td>$16\frac{5}{8}$</td><td>19</td><td></td><td></td><td>$20\frac{1}{8}$</td><td>21</td><td>$23\frac{3}{8}$</td><td></td><td>$35\frac{5}{8}$</td><td></td><td>$62\frac{7}{8}$</td></tr>
</table></td><td>5</td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>Die Ableitungsfunktion $K': x \quad K'(x)$ gibt die Grenzkosten in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x an. Ermitteln Sie den Funktionsterm K’(x) und berechnen Sie bei welcher Produktionsmenge die Grenzkosten minimal sind.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>4.3</td><td>Der Erlös E(x) des Unternehmens in Abhängigkeit von der Produktionsmenge ergibt sich aus der Funktion E(x) = 5x mit $0 \le x \le 11$, wobei die Erlöse ebenfalls in der Einheit 1000 Euro angegeben werden.</td><td></td></tr>
<tr><td>4.3.1</td><td>Berechnen Sie, bei welcher Produktionsmenge Erlös und Gesamtkosten gleich groß sind. Runden Sie die Ergebnisse, falls nötig, auf zwei Nachkommastellen.</td><td>7</td></tr>
<tr><td>4.3.2</td><td>Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion E in das angelegte Koordinatensystem ein und geben Sie mit Hilfe der Zeichnung und des Ergebnisses von Teilaufgabe 4.3.1 an, bei welcher Produktionsmenge ein Gewinn erzielt wird.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4.3.3</td><td>Der Term $G(x) = E(x) - K(x)$ mit $0 \le x \le 11$ beschreibt den Gewinn bzw. den Verlust des Betriebes. Berechnen Sie, bei welcher Produktionsmenge x der maximale Gewinn erzielt wird und geben Sie dessen Höhe an.</td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe:</td><td>25</td></tr>
</table>

Analytische Geometrie: Aufgabe 5		BE
5.0	In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte A(−6; −6; 0), B(–4; 5; 10) und D(8; –1; –2) gegeben.	
5.1	Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ kollinear sind.	3
5.2	Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und D die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis [BD] bilden.	3
5.3	Berechnen Sie die Winkel des Dreiecks ABD.	4
5.4	Der Punkt C bildet mit den Punkten A, B und D die Raute ABCD. Fertigen Sie eine Skizze der Raute und berechnen Sie die Koordinaten des Eckpunkts C.	4
5.5	Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelspunkts M der Raute. [Ergebnis: M(2; 2; 4)]	4
5.6	Berechnen Sie den Flächeninhalt der Raute ABCD.	4
5.7	Die Raute ABCD bildet die Grundfläche von Pyramiden mit der Spitze T(−2; 10; t_3). Berechnen Sie t_3 so, dass der Punkt T auf der Senkrechten zur Grundfläche durch den Punkt M liegt.	3
	Summe:	25